Title	正則ナｇ曲線系ニ就イテ（Ｉ）
Author(s)	寺阪, 英孝
Citation	全国紙上数学談話会. 113 p.1-p.6
Issue Date	1936-11-20
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74437
rights	
Note	

512. 正則ナg曲線系ニ就イテ(I)

寺阪 英孝（阪大）

至ル所正則ナ曲面上ノ測地線系ノ性質ヲ位相幾何學的ノ立場カラ考ヘテ見タイ。コゝデハ簡單ノタメ曲面ハ單一連結トスル。ソレ故位相的ニハ曲面ハ球面Sトミナセル。今S上ニアル次ノヨウナg曲線トソノ集合≪正則ナg曲線系ヲナルモノヲ導入シ，ソレヨリ測地線ニ類似ノ性質ヲ出シテミタイ。

I. 連續性　g曲線ハ直線$-\infty < t < \infty$ノ一意連續像$g(t)$デアル。

定義　$a \leqq t \leqq b$ニ對スルg曲線ノ部分ヲg線分トイヒ，$g(\overline{ab})$又ハ$g(\overline{ba})$デ表ハス。a, bニ對スルg曲線上ノ点ガx, yナラバ，コレハ又$g(\overline{xy})$又ハ$g(\overline{yx})$デ表ハスコトモアル。$a \leqq t < \infty$又ハ$-\infty < t \leqq a$ニ對スル曲線ノ部分ハg半曲線ト名ヅケテオク。

II. 局所一意可結性　S上ノ任意ノ点x，任意ノ正數aニ對シ$a > \varepsilon_1 > \varepsilon_2 > 0$ナル$\varepsilon_1, \varepsilon_2$ガ存在シテ，$\overline{U}(x, \varepsilon_2)$（$x$，$\varepsilon_2$近傍ノ閉包）ノ二点$y, z$ハ$U(x, \varepsilon_1)$ニ含マレル$g$線分$g(\overline{yz})$デ一意ニ結バレル。

定義　カヽル近傍対$\overline{U}(x, \varepsilon_2) \subset (x, \varepsilon_1)$ヲ半徑$\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ニ對スル正則近傍對，$U(x, \varepsilon_2)$ダケヲ準正則近傍トイフ。

III. 一意接續性　二ツノg線分$g(\overline{xy})$，$g(\overline{xy'})$

ガ一ツノ g 線分 $g(\overline{xz})$ ヲ共有スレバ，$g(\overline{xy})\subset g(\overline{xy'})$ ナルカ又ハ $g(\overline{xy})\supset g(\overline{xy'})$ ナルカデアル。

IV. $\boxed{\text{発散性}}$ g 曲線上ノ t ニ對スル点 $g(t)$ ハ t ヲ連続的ニ $t\rightarrow+\infty$ 又ハ $\rightarrow-\infty$ トシタトキ，S 上ノ一点ニハ收斂シナイ．（即チ $t_n\longrightarrow\infty$，$t'_n\rightarrow\infty$，$n=1,2,\cdots\cdots\cdots$ ナル數列デ $g(t_n)\longrightarrow x$，$g(t'_n)\longrightarrow x'$，$x\neq x'$ ナルモノガ存在スル。$-\infty$ ニツイテモ同ジ）

（注意） 開曲線ハ発散性ヲ有スルト云ヘルカラ，開 g 曲線ナルモノハ勿論除外シテ丰ルワケデナク，開 g 曲線ガ常ニ存在スルトイフノガ結局証明シタイコトナノデアル。

§1. I, II, III, IV カラ先ヅ g 曲線ガ正則曲面上ノ測地線ト類シタ諸性質ヲ有ツコトヲ証明シテ見ヨウ。

$\boxed{\text{定理 1}}$ S 上ノ点 x ヲ通ル g 半曲線ハ x ヲ含ム準正則近傍ノ境界ト交ハル。（$\leftarrow$ I, II, IV）

（証） x ヨリ出ル g 半曲線 g' ヲ $0\leqq t<\infty$ ノ連続像 $g(t)$ デアルトシ，コレガ一ツノ準正則近傍 $U(z,\varepsilon_2)$ ニ全ク含マレテ丰タト假定スル。発散性ニヨリ $t_n\rightarrow\infty$，$t'_n\rightarrow\infty$ $(n=1,2,\cdots\cdots\cdots)$ ナル數列デ，ソレニ對スル g' 上ノ点列 y_n，y'_n ガ $y_n\rightarrow y$，$y'_n\rightarrow y'$，$y\neq y'$ ナルモノガアル．スルト假定ニヨリ $y\subset\overline{U}(z,\varepsilon_2)$ ナル故

$\overline{U}(y,\delta_2)\subset U(y,\delta_1)\subset U(z,\varepsilon_1)$ 且 $\overline{U}(y,\delta_1)\cdot y'=0$ ナル如キ y ノ正則近傍對 $U(y,\delta_2)\subset U(y,\delta_1)$ ガ存在スル。

Nヲ十分大ニスレバ $n, n'>N$ ニ對シテ $y_n, y'_n \in U(y,\delta_2)$ ダカラ，y_n, y'_n ハ $U(y,\delta_1)$ 内デ g 線分ニヨリ結ベル。一方 y' ハ $\bar{U}(y,\delta_1)$ ト素デアルカラ十分大ナMニ對シテ $m>M$ ナラバ $y'_m \notin \bar{U}(y,\delta_1)$ デアル。

サテ $t_n \to \infty$, $t'_n \to \infty$ ダカラ $n, n'>N$, $m>M$ ナル n, n', m デ $t_n < t'_m < t'_n$ ナルモノガ必ズアル譯デアルが，ソウスルト t_n, t'_n ニ對スル g 線分 $g(\overline{y_n y'_n})$ ハ $\bar{U}(y,\delta_2)$ ノ二点 y_n, y'_n ヲトニカク $\bar{U}(x,\varepsilon_2)$ 内デ結ンデヰルワケデアルが，ソノ途中ニハ t'_m ニ對スル y'_m 即チ $\bar{U}(y,\delta_1)$ 外ノ点ヲ含ンデヰルカラ，$g(\overline{y_n y'_n})$ ハ $U(y,\delta_1)$ ニハ勿論含マレテヰナイ。ソウスレバ y_n, y'_n ハイヅレモ $U(z,\varepsilon_2)$ ノ点デアルニカヽハラズ $U(z,\varepsilon_1)$ 内デ二通ニ結バレルコトヽナリ矛盾スル。

$\boxed{\text{定理 2}}$ g 曲線ハ単一弧（Jordanbogen）ノ連鎖カラナル。即チ $\sum_{i=-\infty}^{\infty} b_i$（$b_i \cdot b_{i+1}$ ハ一点，b_j ハ単一弧）ノヨウニカケル。（← I, II, III）

（証）x ヲ通ル g 曲線ヲ $g(t)(-\infty<t<\infty)$ トシ与ヘラレタ任意ノ数 τ ニ對シ $x=g(\tau)$ トスレバ，$\tau \leq t < \infty$ 及ビ $-\infty < t \leq \tau$ ニ對スル g 半曲線ハ定理 1 ニヨリ x ノ準正則近傍 $U(x,\varepsilon_2)$ ノ境界ト交ハルカラ，x ヨリ出発シ初メテ $\dot{U}(x,\varepsilon_2)$ ト交ハル点ニ對スル t ノ値ヲ夫々 b, a トスレバ（$a<\tau<b$），$a \leq t \leq b$ ニ對スル g 線分 $g(a,b)$ ハ両端ヲ除キ $\subset U(x,\varepsilon_2)$ デアル。$g(a,b)$ が単一弧デアルコトノ云ヒタイノデアルが，ソノタメニ先ヅ $a \leq t_1 < t_2 \leq b$ ナル t_1, t_2 ニ就キ

$g(t_1)=g(t_2)$ ナラバ $t_1 \leqq t \leqq t_2$ ナルスベテノ t ニ對シテ $g(t)=g(t_1)=g(t_2)$ ナルコトヲ證明シヨウ。ソコデモシソウデナイトシ, $t_1<t_3<t_2$ ナル t_3 ニ對シテ $g(t_3) \neq g(t_1)$ トスレバ, $g(t_3)=g(t)$ ヲ滿足スル t ノ値デ (t_1, t_2) ノ間ニアルモノハ閉集合ヲナスカラ, ソノ下端ヲ改メテ t_3 トスレバ確カニ $t_1<t_3$、ソウスレバ更ニ $t_1<t_4<t_3$ ナル t_4 デ, $g(t_4)$ ガ $g(t_1)$ トモ $g(t_3)$ トモ異ナルモノガナケレバナラヌ。然ラバ $g(t_1, t_4)$ ト $g(t_4, t_2)$ トヲ考ヘレバ、両者ハ $g(t_1)=g(t_2)$ ナル点ト $g(t_4)$ トヲ $\dot{U}(x, \varepsilon_2)$ 内デ結ブ g線分デアルニカヽハラズ, $g(t_4, t_2)$ ハ $g(t_3)$ ヲ通リ $g(t_1 t_4)$ ハ $g(t_3)$ ヲ通ラヌカラ両者ハ同一デナク、コレハ一意可結性ニ反スル。即チ $g(t_1)=g(t_2)$ ナラバスベテノ $t_1 \leqq t \leqq t_2$ ニツキ $g(t)=g(t_1)$ トナル。

ヨツテ同一点ヲ與ヘル t ノ集合ハ各々 $a \leqq t \leqq b$ 上デ点又ハ線分ヲナスカラ, 從ツテ $g(a, b)$ ハ確カニ單一デアルコトガ判ル。

任意ノ τ ニ對シ $a<\tau<b$ ナル a, b ガ定マリ, $g(a, b)$ ハ單一弧ニナルノデアルカラ, コレヨリ直チニ定理2ガ導ケル。(コノ証明ニハ定理1ヲツカツタガ, ナシデモスム)

$\boxed{\text{定理3}}$ 二ツノ g曲線ハ共通点ニ於イテ互ニ交叉スル。(←Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ)

(証) g曲線 g_1, g_2 ガエナル共通点ヲ有スルトシ, x

ヲ含ム g_1, g_2 ノ g線分ヲ夫々 S_1, S_2 トシ, x ノ任意ノ正則近傍對ヲ $U(x,\varepsilon_2)\subset U(x,\varepsilon_1)$。更ニ x カラ S_1, S_2 ノ両端ニ至ル距離及ビ ε_2 ノ双方ヨリ小ナル半径 $\delta_1>\delta_2$ ノ正則近傍對ヲ $U(x,\delta_2)\subset U(x,\delta_1)$ トスル。xヨリ出発シ最初ニ $\dot{U}(x,\delta_1)$ ニ交ハル S_1 及ビ S_2 ノ点ヲ夫々 y_1, z_1 及ビ y_2, z_2 トスレバ $g(\overline{y_1z_1})\subset S_1$, $g(\overline{y_2z_2})\subset S_2$ デアッテ且ッ $g(\overline{y_1z_1})$ ト $g(\overline{y_2z_2})$ トハ x 以外ニ共通点ハナイ（II ノ $U(x,\varepsilon_2)$ ニオケル一意可結性ト III ノ一意接続性ニヨル）

ソコデ g_1, g_2 ガ x デ交叉シナイト云フノハ $\dot{U}(x,\delta_2)$ ノ上デ (y_1,z_1) (y_2,z_2) ナル二組ノ点ガ互ニ他ヲ分タナイトイフコトハ同意義ト解釋シ，コノ假定カラ矛盾ヲ導キタイ。

ソレデ今 y_1 ト z_2 トガ y_2 ト z_1 トニヨリ分タレテヰルト假定シ，$g(\overline{xy_1})\cdot U(x,\delta_2)\ni y'$, $g(\overline{xz_2})\cdot U(x,\delta_2)\ni z'$ ナル二点 y', z' ヲ $U(x,\delta_1)$ 内デ g線分 $g(\overline{y'z'})$ ニヨリ結ベバ，假定ニヨリコレハ $g(\overline{y_1z_1})$, $g(\overline{y_2z_2})$ ノイヅレカニ y', z' 以外ノ点デ交ハラナケレバナラヌ。ドチラデモ同等ナル故 $g(\overline{y_1z_1})$ ト u ナル点デ交ハッタトスレバ y', u ハイヅレモ $\subset U(x,\delta_1)$。従ッテ $\subset U(x,\varepsilon_2)$. ヨッテ II, III ヨリ矛盾。——

<u>定義</u>　Jordan 曲線デ囲マレタ閉面分 $\overline{D}$ デ $\overline{D}\ni x, y$ ナル二点 x, y ヲ両端トスル g線分 $g(\overline{xy})$ ガ唯一ッ $\overline{D}$ 内ニ存在スル如キモノヲ，正則領域トイフ。

$\boxed{\text{定理4}}$ S ノ任意ノ点 x ニ對シ, x ヲ内点トスル正則領域が存在スル。特ニ三ツノ g 線分ヲ境界トスル正則領域ヲトルコトが出來ル。(← I, II, III, IV)

(証) x ノ一ツノ正則近傍對ノ半徑ヲ $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$, $\varepsilon_2 > \delta_1 > \delta_2$ ナル δ_1, δ_2 ヲ半徑トスル正則近傍對ヲ $U(x, \delta_2) \subset U(x, \delta_1)$ トスレバ $\overline{U}(x, \delta_1) \subset U(x, \varepsilon_2)$ 故ニ $\overline{U}(x, \delta_1)$ モ亦準正則近傍ト考ヘラレル。ヨッテ定理1ニヨリ $U(x, \delta_1)$ 内ノ点ヲ通ル凡テノ g 半曲線ハ $\dot{U}(x, \delta_1)$ ト交ハル。

ソコデ先ヅ x ヲ通ル任意ノ g 曲線ヲ考ヘ, ソノ上ノ x ヲ含ム開 g 線分中 $U(x, \delta_1)$ ニ含マレル最大ノモノヲ S トシ S 上デ x ノ両側ニ $\subset U(x, \delta_2)$ ナル二点 a, d ヲトル。d ヲ通リ S ト異ナル g 線分ヲ取リ, ソレヲ双方ニ延長シテ初メテ $\dot{U}(x, \delta_1)$ ト交ハルマデノ部分ヲ S_1, S_1 上デ d ノ両側ニ $\subset U(x, \delta_2)$ ナル二点 b, c ヲトッテ $g(\overline{ab})$, $g(\overline{ac})$ ヲ求メ, ソレヲ双方ニ延長シテ初メテ $\dot{U}(x, \delta_1)$ ト交ハル迄ノ部分ヲ夫々 S_2, S_3 トスル。S, S_1, S_2, S_3 ハ凡ベテ準正則近傍 $U(x, \delta_1)$ ニ屬スルカラ, 上記ノ a, b, c, d 以外ノ点デハ交ハラナイ。

$g(\overline{ab})$, $g(\overline{bc})$, $g(\overline{ca})$ デ囲マレタ面分ハ x ヲ含ム正則領域ナルコトハ II, III ノ性質ヨリ出ル。——

昭和11年7月—12月分ノ會費金貳円也別便ノ振替用紙ニテ至急御拂込ミ下サイ。

大阪市北區
大阪帝國大學
理學部數學教室　清水辰次郎

振替口座番號　大阪一七七四三番